Условие задачи 5.5 (в)

5.5. (*2*) Количественно исследовать влияние формы импульса $\xi(t)$ на ширину спектра $S(\nu)$. За длительность импульса принять интервал, равный длительности эквивалентного прямоугольного импульса: $\Delta t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 \, dt \Big/ \left(\max|\xi(t)|\right)^2$. За ширину спектра принять полосу частот, определяемую соотношением $\Delta\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 \, d\nu \Big/ \left(\max|S(\nu)|\right)^2$. Исходя из принятых определений, найти величину численного коэффициента C в теореме о ширине частотной полосы: $\Delta t \Delta\nu = C$. Изобразить графически сигналы $\xi(t)$ в зависимости от τ и их спектры $S(\nu)$ в зависимости от частоты ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}. Решение некоторых вариантов задачи возможно аналитически, но, как правило, рекомендуется воспользоваться компьютером для вычисления дискретных спектров.

Получить и сравнить результаты для следующих импульсов.

<u>Вариант (в)</u>

прямоугольный импульс $\xi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$,

"косинусоидальный" импульс $\xi(t) = \begin{cases} \frac{a}{2}\left(1 + \cos(2\pi t/\tau)\right), & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$ и

гауссов импульс $\xi(t) = a \exp\left(-t^2/\tau^2\right)$.

Торбахов Даниил,
307 группа

Прямоугольный импульс

$$\xi(t) = \begin{cases} a, |t| < \tau/2, \\ 0, |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Для данного импульса $\Delta t = \tau$

S(ν) $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\nu t} dt = \frac{a}{2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\nu t} dt = \frac{a\tau}{2\pi}\frac{\sin(\nu\frac{\tau}{2})}{\nu\frac{\tau}{2}} =$
$\frac{a\tau}{2\pi}$sinc($\nu\,\frac{\tau}{2}$)

Значит, max$|S(\nu)|$ = $\frac{a\tau}{2\pi}$

Прямоугольный импульс

$\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 \, d\omega = \frac{a^2\tau^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin\left(\nu\frac{\tau}{2}\right)}{\nu\frac{\tau}{2}})^2 d\nu$ =

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx = \pi$, то

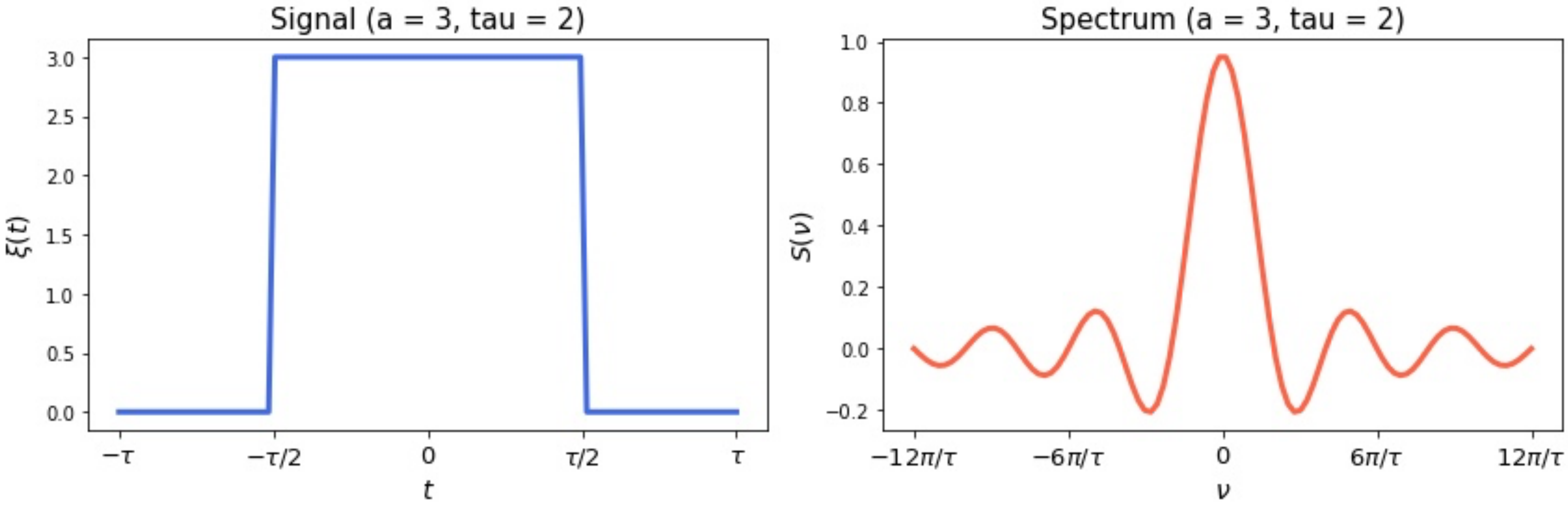
= $\frac{a^2\tau}{2\pi^2}\pi = \frac{a^2\tau}{2\pi}$

Теперь мы можем посчитать длину спектра

$\Delta\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu / (max|S(\nu)|)^2$ = $\frac{a^2\tau}{2\pi} \frac{(2\pi)^2}{(a\tau)^2} = \frac{2\pi}{\tau}$

Тогда искомый коэффициент $C = \Delta t \Delta\nu = 2\pi$

Графики прямоугольного импульса и его спектра



«Косинусоидальный» импульс

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{a}{2}(1+\cos(2\pi t/\tau)), & |t| < \tau/2 \\ 0, |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$S(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)e^{-i\nu t}dt = \frac{a}{4\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right)e^{-i\nu t}dt = \frac{a}{2\pi\nu}\frac{sin\left(\nu\frac{\tau}{2}\right)}{1 - (\frac{\nu\tau}{2})^2}$$

Значит, $max|S(\nu)| = \frac{a\tau}{4\pi}$ и $(max|S(\nu)|)^2 = \frac{a^2\tau^2}{16\pi^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\nu)|^2 d\nu = \frac{a^2}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(\frac{\nu\tau}{2})}{\nu(1-(\frac{\nu\tau}{2\pi})^2)}\right)^2 d\nu =$$

Делаем замену переменных: $x = \frac{\nu\tau}{2}, dx = \frac{\tau}{2}d\nu$

«Косинусоидальный» импульс

$\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\nu)|^2 d\nu$ = $\frac{a^2\tau}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin x}{x(1-(\frac{x}{\pi})^2)})^2 dx \approx 4.71\,\frac{a^2\tau}{8\pi^2}$

Теперь можем посчитать длину спектра:

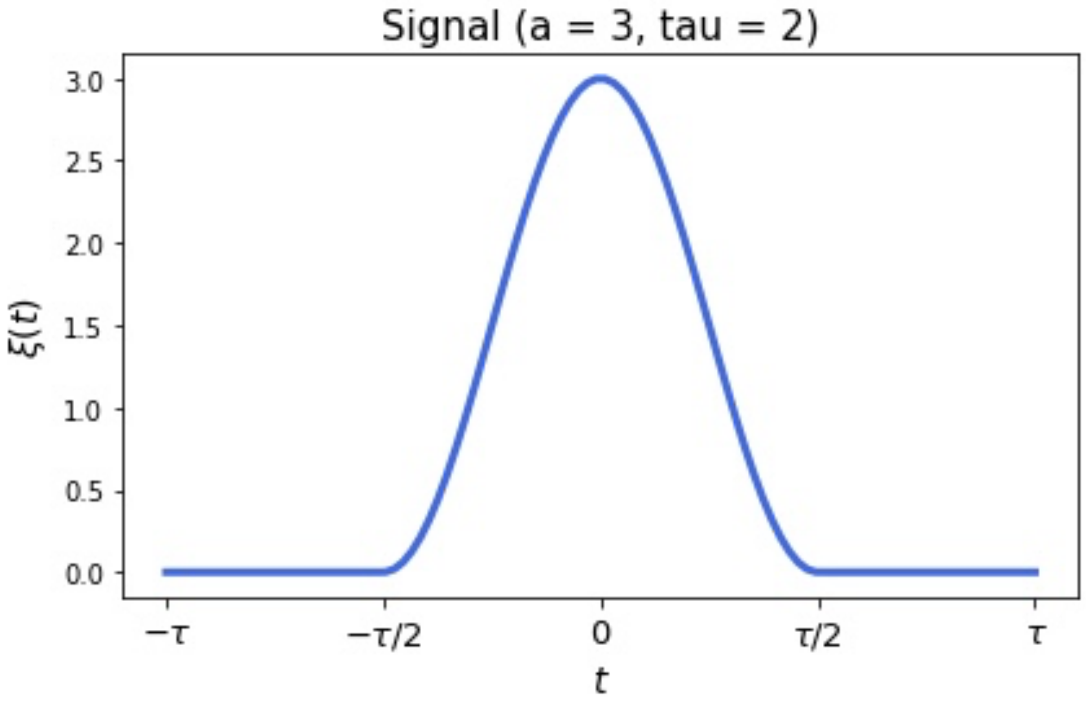
$\Delta\nu = \int_{-\infty}^{+\infty}|S(\nu)|^2 d\nu/(max|S(\nu)|)^2$ = $4.71\,\frac{a^2\tau}{8\pi^2}\frac{16\pi^2}{a^2\tau^2} = \frac{9.42}{\tau}$

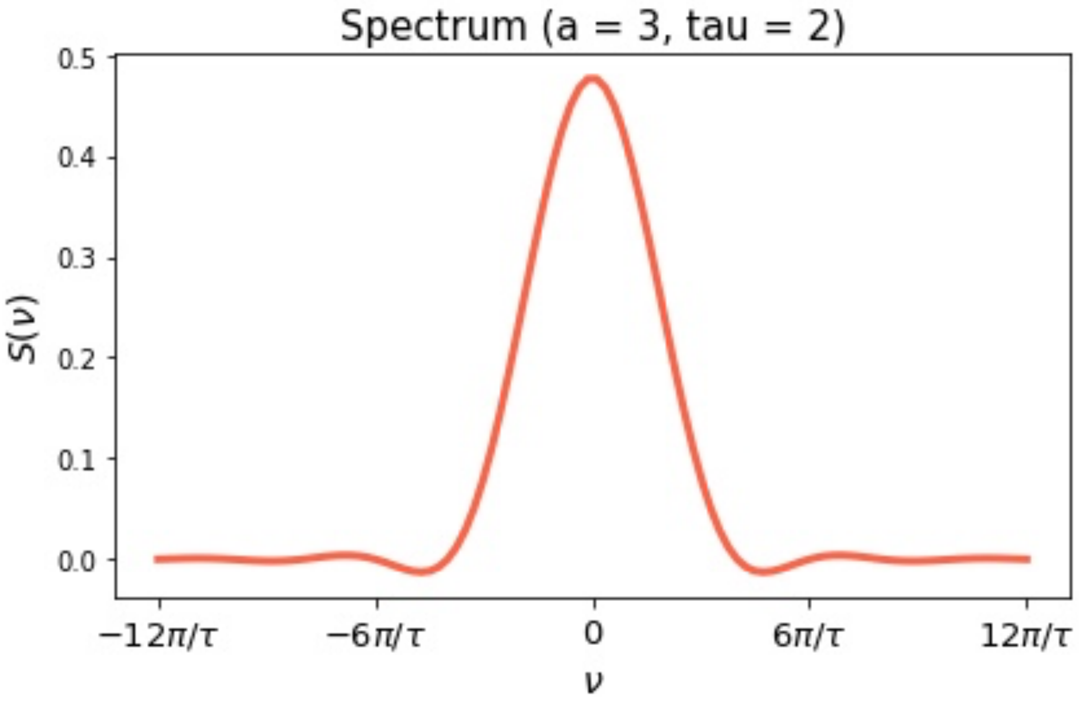
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi(t))^2 dt = \frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\left[1+\cos(\frac{2\pi t}{\tau})\right]^2 dt = \frac{3\tau a^2}{8}; max|\xi(t)| = a$$

Значит $\Delta t = \frac{3\tau}{8}$

Тогда искомый коэффициент $C = \Delta t\Delta\nu = \frac{9.42}{\tau}\frac{3\tau}{8} \approx 3.53$

Графики «косинусоидального» импульса и его спектра





Гауссов импульс

$\xi(t) = a\exp(-t^2/\tau^2)$

$\Delta t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2t^2}{\tau^2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\tau$ (интеграл Пуассона)

$S(\nu) = \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2t^2}{\tau^2}} e^{-i\nu t} dt = \frac{a\tau\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-\nu^2\tau^2}{4}}$

Значит $max|S(\nu)| = \frac{a\tau\sqrt{\pi}}{2}$

$\Delta\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu/(max|S(\nu)|)^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau}$

Тогда искомый коэффициент $C = \Delta t \Delta\nu = \pi$

График гауссова импульса и его спектра